Los números, operaciones y sus propiedades

Números Reales

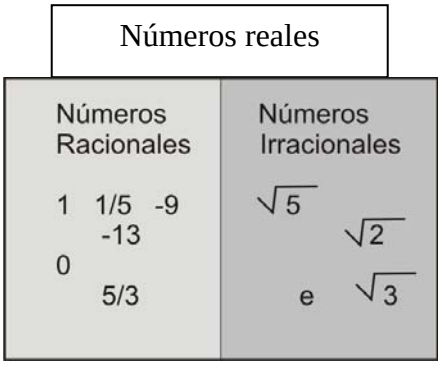
En principio podemos definir a los números reales como aquellos números que tienen expansión decimal periódica o tienen expansión decimal no periódica. Por ejemplo,

- 3 es un número real ya que 3 = 3,00000000000….
- ½ es un número real ya que ½ = 0,5000000000….
- 1/3 es un número real ya que 1/3 = 0,3333333333333….
- $\sqrt{2}$ es un número real ya que $\sqrt{2}$ =1,41421356237309504880168872420 97….
- 0,12345678910111213141516171819202122 23…. Es un número real.
- 1,0100100010000100000100000010000000 1…. Es un número real.

Como puede verse algunos tienen expansión decimal periódica a, b y c y otros tienen expansión decimal no periódica d, e y f. Los números que tienen expansión decimal periódica se llaman números Racionales (denotados por Q) y los números que tienen expansión decimal no periódica se llaman Irracionales (denotados por I). En consecuencia a, b y c son números racionales y d, e y f son números irracionales. Claramente, la propiedad de tener expansión decimal periódica para los racionales y la propiedad de tener expansión decimal no periódica para los irracionales define dos tipo de números muy distintos. Lo que significa que un número real es racional o irracional, nunca ambos.

Conjunto de los números Reales

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, el conjunto de los números reales se define como la unión de dos tipos de números, a saber; los números racionales, los números irracionales. Esta idea se puede visualizar simbólicamente en el siguiente gráfico



A su vez, los números racionales se clasifican en:

- **Números Naturales (N)**, los que usamos para contar. Por ejemplo, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, …
- **Números Enteros (Z)**, son los números naturales, sus negativos y el cero. Por ejemplo, …-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…
- **Números Fraccionarios**, son aquellos números que se pueden expresar como cociente de dos números enteros, es decir, son números de la forma $\frac{a}{b}$ con a, b enteros y $b \neq 0$.

Por su parte los números irracionales se clasifican en:

- **Números Algebraicos**, son aquellos que provienen de la solución de alguna ecuación algebraica y se representan por un número finito de radicales libres o anidados. Por ejemplo,

$$\sqrt{2}, \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{4}$$

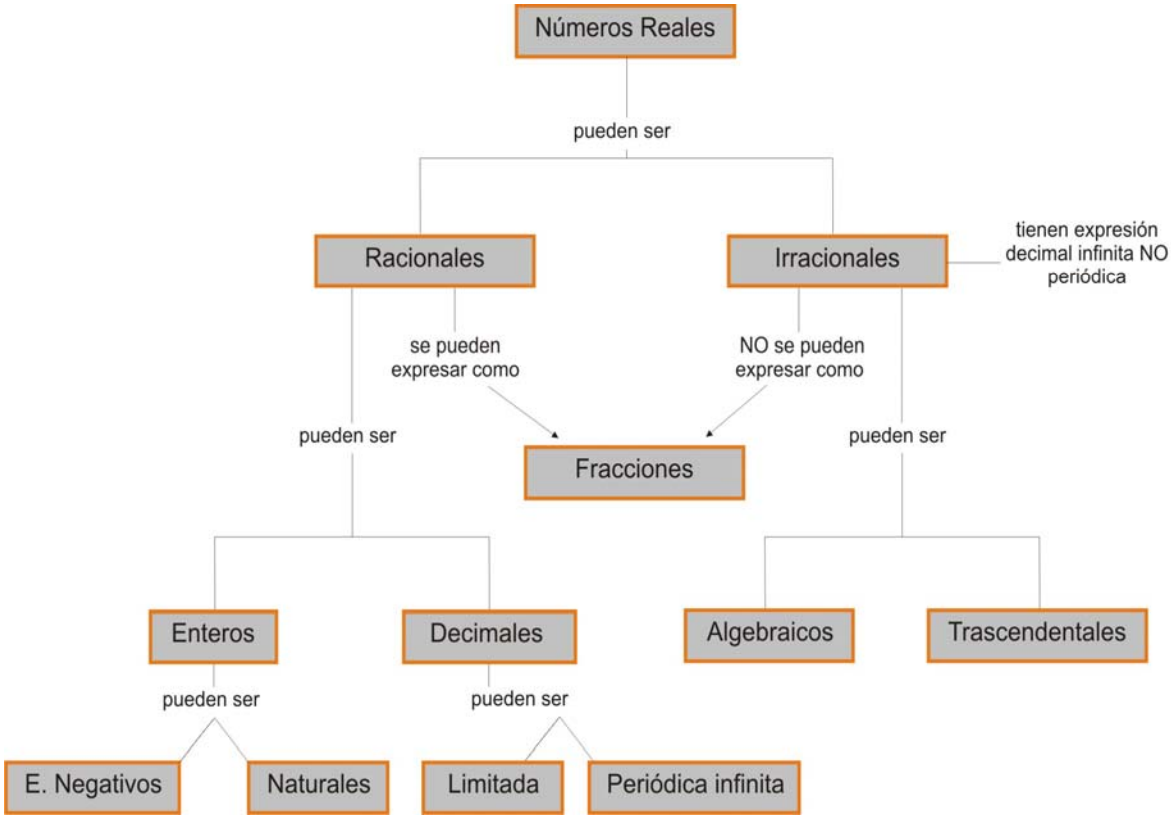
  En general, todas **las raíces no exactas de cualquier orden son irracionales algebraicos**. Hay números racionales que parecen irracionales, como por ejemplo $\frac{1+\sqrt{4}}{2}$, $\frac{\sqrt{9}}{3}$ y $\sqrt{25}$. A simple vista parecen irracionales pero al observarlos con más detenimiento notamos que las raíces son exactas y al calcularlas llegamos a números racionales. En efecto,

  - $\frac{1+\sqrt{4}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$.
  - $\frac{\sqrt{9}}{3} = \frac{3}{3} = 1$
  - $\sqrt{25} = 5$

- **Números Trascendentales**, no pueden representarse mediante un número finito de raíces libres o anidadas; provienen de las llamadas funciones trascendentes: trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. El número π y e son irracionales trascendentes, puesto que no pueden expresarse mediante radicales. Los irracionales trascendentes también surgen al escribir números decimales no periódicos al azar o con un patrón que no lleva periodo definido. Por ejemplo,
  - 0,12345678910111213141516171819202122 23….

- 1,0100100010000100000100000010000000 1….

Para terminar es recomendable observar con atención el siguiente mapa conceptual, para reafirmar todo lo anteriormente expuesto a cerca de los números reales.

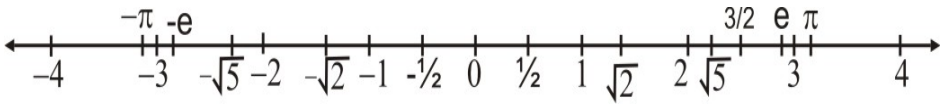


A partir de ahora, cuando se diga número sin adjetivo calificativo, estaremos hablando de número real. Puedes estar seguro de eso.

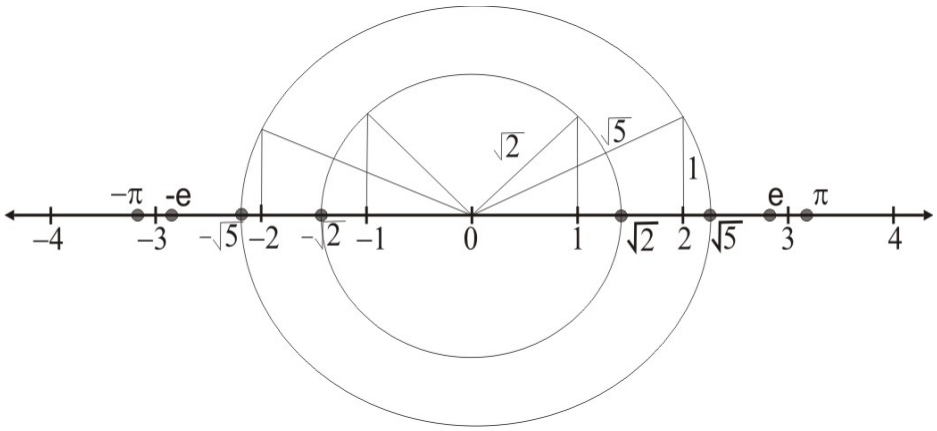
La recta real

Llamamos recta real a la recta donde cada punto que la conforma es un número real. Como cada punto de ella esta identificado con un número racional o irracional esta recta es una recta compacta donde no queda ningún "espacio libre" entre dos puntos de ella. Para tener una idea de esta propiedad imagine que dados dos números racionales siempre es posible encontrar uno entre ellos. Esto es simple considerando que la semisuma de dos números cualquiera siempre esta entre ellos dos. Es decir, dados dos números racionales a y b con $a<b$, siempre se verifica que $a<\frac{a+b}{2}<b$.

En la recta real representamos todos los números (recuerde que todo punto de la recta esta etiquetado con un número real) y en ella podemos visualizar el orden en que se ubican los números



Los números ½ , 3/2 , π, e por citar algunos, se representan usando su expansión decimal ubicando en la recta aproximadamente su lugar (respetando el orden). En el caso de algunos números irracionales como $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$,... pueden representarse **exactamente** en la recta mediante el uso de una regla y compás. Por ejemplo, para representar $\pm\sqrt{2}$ consideramos un triángulo rectángulo equilátero de catetos 1, con uno de sus vértices en el origen de la recta (ver figura). Luego con un compás trazamos una circunferencia de radio la hipotenusa de dicho triángulo (que es $\sqrt{2}$). La intersección de esta circunferencia con la recta real es el número $\sqrt{2}$ a la derecha, y $-\sqrt{2}$ a la izquierda (ver figura). De manera análoga se puede representar $\pm\sqrt{5}$. En este caso, se toma un triángulo rectángulo de catetos 1 y 2, tal como se muestra en la figura.



Operaciones con números

Como los números reales es la unión de dos conjuntos disjuntos $R = Q \cup I$. Las operaciones deben analizarse desde dos puntos de vistas distintos.

Operaciones en los números racionales.

Lo primero que debemos decir es que las operaciones de suma, resta, multiplicación y división con los números racionales están bien definidas, esto quiere decir, que toda vez que se opera con cualquier par de números racionales el resultado es un racional. Por ejemplo,

- Al sumar los números racionales $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{10}$ obtenemos el número racional $\frac{7}{10}$

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{(10\div 5)2+(10\div 10)3}{10}=\frac{(2)2+(1)3}{10}=\frac{4+3}{10}=\frac{7}{10}$$

- Al restar los números racionales $\frac{17}{4}$ y $\frac{11}{3}$ obtenemos el número racional $\frac{7}{12}$

$$\frac{17}{4}-\frac{11}{3}=\frac{(12\div 4)17-(12\div 3)11}{12}=\frac{51-44}{12}=\frac{7}{12}$$

- Se pueden efectuar operaciones combinadas tales como $8+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}\right]-8\left(\frac{1}{8}\right)-25$ y el resultado es racional

$$8+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}\right]-8\left(\frac{1}{8}\right)-25=8+\left[\frac{4}{2}\right]-1-25=8+2-26=-16$$

Operaciones con números irracionales

En cuanto a las operaciones con números irracionales es necesario tener en cuenta lo siguiente:

- $\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Dos irracionales cuya suma resulta un irracional.
- $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$. Dos irracionales cuyo producto es un irracional.
- $\sqrt{5}+\left(-\sqrt{5}\right)=0$. Dos irracionales cuya suma es un racional.
- $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$. Dos irracionales cuyo producto es un racional.
- $\sqrt{18}\div\sqrt{2}=\sqrt{18\div 2}=\sqrt{9}=3$. Dos irracionales cuya división resulta un racional.

Como podemos notar **las operaciones de suma, resta, multiplicación y división no son operaciones bien definidas en los números irracionales**. Esta afirmación quiere decir que

dados dos números irracionales no siempre la suma, resta, multiplicación o división de dichos números resulta un número irracional. Los ejemplos anteriores nos advierte que los números irracionales no se comportan, con respecto a las operaciones, de manera similar a los números racionales. Sin embargo y a pesar de su extraño comportamiento tenemos dos afirmaciones que siempre son válidas:

1. Si a es racional y b es irracional entonces la suma $a+b$ siempre es irracional.
2. Si $a \neq 0$ es racional y b es irracional entonces el producto $a \cdot b$ siempre es irracional.

En virtud de estas afirmaciones podemos decir que:

- $2+\sqrt{3}$ es irracional.
- $2 \cdot \sqrt{5}$ es irracional

Propiedades fundamentales de los números

Por propiedad fundamental, queremos decir que algo es tan básico que se puede entender, y entenderlo significa más que memorizarlo. Entender una propiedad significa ver para qué fines sirve esa propiedad, reconocer sus implicaciones y ser capaces de derivar otras de ellas. En la siguiente tabla se muestra, a manera de resumen, las operaciones entre números y sus propiedades. En cada caso las letras a, b y c representan números.

Propiedades	Adición	Producto
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$a+(b+c)=a+(b+c)$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Elemento Neutro	$a+0=0+a=a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Elemento Simétrico	$a+(-a)=(-a)+a=0$	$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
Distributiva	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Si observamos con atención notaremos que las propiedades de los números se basan en las operaciones de suma y multiplicación. Esto se debe a que la suma y la multiplicación son las **operaciones básicas**; la resta y la división dependen de ellas. La resta es la suma de un inverso aditivo y la división es la multiplicación por un inverso multiplicativo. Esto es,

$$a-b=a+(-b) \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}=a\cdot b^{-1}.$$

Es obvio que $3-5\neq 5-3$ y $5\div 3\neq 3\div 5$, lo que nos dice que la resta y la división no son conmutativas y tampoco son asociativas. A pesar de estos inconvenientes, estas operaciones son importantes en el cálculo.

La propiedad del elemento simétrico para el producto permite deducir una propiedad de los números muy utilizada en el cálculo.

Sean a y b números. Si el producto $a\cdot b=0$, entonces $a=0$ o $b=0$

Esta propiedad indica que toda vez que el producto de números de cero, necesariamente uno de los factores debe ser cero. Entiéndase que puede ocurrir que a la vez $a=0$ y $b=0$, ya que esta posibilidad no se excluye; cuando en matemáticas decimos "$a=0$ o $b=0$", la conjunción o, se usa siempre en el sentido de "**lo uno o lo otro o las dos cosas a la vez**".

Propiedades de la potencia

En la tabla adjunta se resumen las propiedades que verifica la potencia de números reales.

Propiedades de la potencia	
Exponente Cero	$a^0 = 1$
Exponente Uno	$a^1 = a$
Producto de potencias de igual base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Cociente de potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
Potencia de un cociente	$\left[\frac{a}{b}\right]^n = \frac{a^n}{b^n}$
Potencia de una potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
Exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad \left[\frac{a}{b}\right]^{-n} = \left[\frac{b}{a}\right]^n$
Base negativa exponente par	$(-a)^n = a^n$
Base negativa exponente impar	$(-a)^n = -a^n$